TD 3 - Techniques de calcul algébrique

Solutions des exercices éditées par Mattia Garatti

I - Sommes usuelles

Exercice 1 (Inégalité triangulaire)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Solution. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$P(n) : \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Initialisation Pour $n = 1$, l'inégalité s'écrit comme $|x_1| \leq |x_1|$, trivialement vraie, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie, donc

$$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité triangulaire classique pour deux réels, puis l'hypothèse de récurrence, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + x_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|,$$

ainsi $P(n+1)$ est vraie.

On conclut, par le Principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 ($\star$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$P(n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Initialisation Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit comme $0^2 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$, trivialement vraie, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie, donc

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6},$$

ainsi $P(n+1)$ est vraie.

On conclut, par le Principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1; \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Solution. Soit $x \in \mathbb{C}$. Distinguons les deux cas :

- si $x = 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k = 1$. La somme contient $n+1$ termes égaux à 1, donc

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1,$$

- si $x \neq 1$, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$P(n) : \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Initialisation Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit comme $1 = \frac{1-x}{1-x}$, trivialement vraie, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie, donc

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \end{aligned}$$

ainsi $P(n+1)$ est vraie.

On conclut, par le Principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. [1]

Exercice 4 ($\star$)**.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

1. Pour le cas $x \neq 1$, on peut procéder dans une autre manière aussi : en effet,

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1}$$

et, en faisant un changement d'indice $j = k+1$ dans la deuxième somme,

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{j=1}^{n+1} x^j = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{j=1}^{n} x^j - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}.$$

Comme $x \neq 1$, on peut diviser par $1-x$, en obtenant

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Solution. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par observer que

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} - b\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-(k-1)}.$$

En effectuant le changement d'indice $j = k+1$ dans la première somme, on obtient

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-(k-1)} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} a^j b^{n-(j-1)} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-(k-1)} \\ &= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-(j-1)} - \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-(k-1)} - b^{n+1} \\ &= a^{n+1} - b^{n+1}.\end{aligned}$$

II - Binôme de Newton

Exercice 5. Montrer que le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.
Indication : on pourra exprimer le produit de n entiers consécutifs à l'aide de factorielles.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. On observe que le produit de n entiers strictement positifs consécutifs est totalement déterminé en choisissant qu'un seul $k \in \mathbb{N}$ et

$$(k+1)\dots(k+n) = \frac{(k+n)!}{k!}.$$

Montrons par récurrence sur $s \in \mathbb{N}$ la propriété

$$P(s) : \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \left(n+k = s \Rightarrow \frac{(k+n)!}{n!k!} \in \mathbb{N}\right).$$

Initialisation Pour $s = 0$, on a, forcément, $n = k = 0$ et $\frac{0!}{0!0!} = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité Supposons qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $P(s)$ est vraie, donc

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \left(n+k = s \Rightarrow \frac{(k+n)!}{n!k!} \in \mathbb{N}\right).$$

Soient $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n+k = s+1$. On distingue différents cas :

- si $n = 0$, clairement $k = s+1$ et $\frac{(k+n)!}{n!k!} = \frac{(s+1)!}{0!(s+1)!} = 1 \in \mathbb{N}$,
- si $k = 0$, clairement $n = s+1$ et $\frac{(k+n)!}{n!k!} = \frac{(s+1)!}{(s+1)!0!} = 1 \in \mathbb{N}$,
- si $n \neq 0$ et $k \neq 0$, on peut observer que

$$\frac{(k+n)!}{n!k!} = \frac{(k+n)(k+n-1)!}{n!k!} = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)k!} + \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!}$$

où les deux termes à droite sont entiers par hypothèse de récurrence : en effet, $k+n-1 = s+1-1 = s$. En particulier,

$$\frac{(k+n)!}{n!k!} \in \mathbb{N},$$

ainsi $P(s+1)$ est vraie.

On conclut, par le Principe de récurrence, que $P(s)$ est vraie pour tout $s \in \mathbb{N}$.

Maintenant, si on prend une séquence d'entiers strictement négatifs on se peut ramener à le cas montré en regroupant le signe global et si la séquence contient 0, l'assertion est triviale.

Exercice 6 ($\star$)**.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :
$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \text{ et que } \binom{n}{1} = n.$$
2. Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, montrer que :
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
3. (Identité de Pascal) Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, montrer que :
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Solution.
1.Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1, \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

2. Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

3. Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!\,((k+1)+(n-k))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 7 ($\star$)**.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$, développer à l'aide de la formule du binôme de Newton :

1. $(a+b)^4$;
2. $(a-b)^5$.

Solution. Soient $a, b \in \mathbb{C}$.
1. On a
$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = \binom{4}{0} a^{4-0} b^0 + \binom{4}{1} a^{4-1} b^1 + \binom{4}{2} a^{4-2} b^2 + \binom{4}{3} a^{4-3} b^3 + \binom{4}{4} a^{4-4} b^4 \\
&= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

2. On a
$$\begin{aligned}
(a-b)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} (-b)^k \\
&= \binom{5}{0} a^{5-0} (-b)^0 + \binom{5}{1} a^{5-1} (-b)^1 + \binom{5}{2} a^{5-2} (-b)^2 + \binom{5}{3} a^{5-3} (-b)^3 \\
&\quad + \binom{5}{4} a^{5-4} (-b)^4 + \binom{5}{5} a^{5-5} (-b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5.
\end{aligned}$$

Exercice 8 ($\star$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et que} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$
2. En déduire la valeur de :
$$\sum_{\substack{k \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et de} \quad \sum_{\substack{k \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Indication : pour la question 2, on pourra utiliser la question 1 et montrer que si on pose $I = \sum_{\substack{k \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ et $J = \sum_{\substack{k \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$, alors $I + J = 2^n$ et $I - J = 0$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On a
$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
et
$$0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k.$$

2. On commence par observer que
$$\sum_{\substack{k \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$$
et
$$\sum_{\substack{k \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$
Posons
$$I = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \text{ et } J = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$
On observe que, en utilisant les égalités obtenues dans le point 1,
$$I + J = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
et
$$\begin{aligned} I - J &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} - \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} 1^{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} 1^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0, \end{aligned}$$
donc on a le système
$$\begin{cases} I + J = 2^n, \\ I - J = 0, \end{cases}$$
qui nous porte à obtenir
$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = 2^{n-1} \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$